**Компонент ОПОП 01.03.02 Прикладная математика и информатика**

**направленность (профиль) Системное программирование и компьютерные технологии**

**наименование ОПОП**

**К.М.01.07**

**шифр дисциплины**

# ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

**Дисциплины (модуля)** **Комплексный анализ**

Разработчик (и):
Левитес В. В.
ФИО
доцент кафедры ВМиФ
должность

канд. пед. наук
ученая степень, звание

Утверждено на заседании кафедры
_____Высшей математики и физики___
наименование кафедры

протокол № 6 от 22.03.2024

Заведующий кафедрой
____________________ ____ Левитес В.В. ___
подпись ФИО

## 1. Критерии и средства оценивания компетенций и индикаторов их достижения, формируемых дисциплиной (модулем)

| Код и наименование компетенции | Код и наименование индикатора(ов) достижения компетенции | Результаты обучения по дисциплине (модулю) | | | Оценочные средства текущего контроля | Оценочные средства промежуточной аттестации |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Знать* | *Уметь* | *Владеть* | | |
| ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности | ИД-1ОПК-3 Применяет математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности<br>ИД-2ОПК-3 Модифицирует математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности<br>ИД-3ОПК-3 Использует фундаментальные результаты математики при создании моделей в области профессиональных интересов | – основные методы доказательств теорем и утверждений комплексного анализа. | – доказывать основные теоремы и утверждения комплексного анализа;<br>– решать основные типы задач данного курса, используя при этом изученный аппарат. | – основными понятиями комплексного анализа,<br>– математическим аппаратом, необходимым при изучении других дисциплин. | - комплект заданий для выполнения практических работ;<br>- тестовые задания;<br>- типовые задания по вариантам для выполнения контрольной работы | Аудиторная контрольная работа, индивидуальное домашнее задание, лабораторная работа |

## 2. Оценка уровня сформированности компетенций (индикаторов их достижения)

| Показатели оценивания компетенций (индикаторов их достижения) | Шкала и критерии оценки уровня сформированности компетенций (индикаторов их достижения) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Ниже порогового** *(«неудовлетворительно»)* | **Пороговый** *(«удовлетворительно»)* | **Продвинутый** *(«хорошо»)* | **Высокий** *(«отлично»)* |
| **Полнота знаний** | Уровень знаний ниже минимальных требований.<br>Имели место грубые ошибки. | Минимально допустимый уровень знаний.<br>Допущены не грубые ошибки. | Уровень знаний в объёме, соответствующем программе подготовки.<br>Допущены некоторые погрешности. | Уровень знаний в объёме, соответствующем программе подготовки. |
| **Наличие умений** | При выполнении стандартных заданий не продемонстрированы основные умения.<br>Имели место грубые ошибки. | Продемонстрированы основные умения.<br>Выполнены типовые задания с не грубыми ошибками.<br>Выполнены все задания, но не в полном объеме (отсутствуют пояснения, неполные выводы) | Продемонстрированы все основные умения.<br>Выполнены все основные задания с некоторыми погрешностями.<br>Выполнены все задания в полном объёме, но некоторые с недочетами. | Продемонстрированы все основные умения.<br>Выполнены все основные и дополнительные задания без ошибок и погрешностей.<br>Задания выполнены в полном объеме без недочетов. |
| **Наличие навыков (владение опытом)** | При выполнении стандартных заданий не продемонстрированы базовые навыки.<br>Имели место грубые ошибки. | Имеется минимальный набор навыков для выполнения стандартных заданий с некоторыми недочетами. | Продемонстрированы базовые навыки при выполнении стандартных заданий с некоторыми недочетами. | Продемонстрированы все основные умения.<br>Выполнены все основные и дополнительные задания без ошибок и погрешностей.<br>Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач. |
| **Характеристика сформированности компетенции** | Компетенции фактически не сформированы.<br>Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач.<br><br>ИЛИ<br>Зачетное количество баллов не набрано согласно установленному диапазону | Сформированность компетенций соответствует минимальным требованиям.<br>Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач.<br><br>ИЛИ<br>Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону | Сформированность компетенций в целом соответствует требованиям.<br>Имеющихся знаний, умений, навыков достаточно для решения стандартных профессиональных задач.<br><br>ИЛИ<br>Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону | Сформированность компетенций полностью соответствует требованиям.<br>Имеющихся знаний, умений, навыков в полной мере достаточно для решения сложных, в том числе нестандартных, профессиональных задач.<br>ИЛИ<br>Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону |

## 3. Критерии и шкала оценивания заданий текущего контроля

### 1. Контрольная работа

| Баллы | Критерии оценивания |
|---|---|
| 8-10 | контрольная работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием непонимания материала) |
| 6-8 | контрольная работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна негрубая ошибка или два-три недочета в выкладках или графиках, если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки |
| 2-6 | студент допустил более одной грубой ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках и графиках, но студент владеет обязательными умениями по проверяемой теме. |
| 0 | студент показал полное отсутствие обязательных знаний и умений по проверяемой теме |

*Примечание:*

К *грубым* ошибкам относятся незнание студентом формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять, незнание приемов решения задач, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской.

К *негрубым* ошибкам относятся вычислительные ошибки, если они являются опиской, потеря решения уравнения или сохранение в ответе постороннего корня.

К *недочетам* относятся нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решении задания.

### 2. Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ)

| Баллы | Характеристика индивидуального домашнего задания |
|---|---|
| **8** | Уровень расчетно-графической работы отвечает всем требованиям, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено полностью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены без замечаний. |
| **6** | Уровень расчетно-графической работы отвечает всем требованиям, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено полностью, при этом некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно, но все предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены, некоторые из них содержат негрубые ошибки. |
| **4** | Уровень расчетно-графической работы не отвечает большинству требований, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено частично, некоторые практические навыки работы не сформированы, отдельные предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены с грубыми ошибками. |
| **2** | Уровень выполнения ИДЗ показывает, что теоретическое содержание раздела дисциплины не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, все выполненные задания ИДЗ содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения заданий ИДЗ. |

**Требования, предъявляемые к выполнению** ИДЗ:

− ИДЗ должно базироваться на знаниях теоретических и методических вопросах дисциплины. Работа должна содержать элементы творчества, новизны, направленные на эффективное решение заданий ИДЗ;

− ИДЗ должно отразить глубину теоретической подготовки студента, понимание контролируемого учебного материала по дисциплине: умение связывать теоретические положения с их практическим применением, способность самостоятельно формировать и обосновывать собственные выводы, логически и грамотно излагать свои мысли;

− в ИДЗ не допускается переписывание учебников, учебных пособий и других источников;

− Студент – автор ИДЗ полностью отвечает за предложенные решения заданий и правильность всех данных, приведенных в ИДЗ;

− ИДЗ должно быть сдана в назначенный руководителем срок.

**4. Критерии и шкала оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю) при проведении промежуточной аттестации**

Критерии и шкала оценивания результатов освоения дисциплины (модуля) с зачетом

Если обучающийся набрал зачетное количество баллов согласно установленному диапазону по дисциплине (модулю), то он считается аттестованным.

| Оценка | Баллы | Критерии оценивания |
|---|---|---|
| *Зачтено* | 60 - 100 | Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону |
| *Незачтено* | менее 60 | Зачетное количество согласно установленному диапазону баллов не набрано |

**5. Задания диагностической работы для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю) в рамках внутренней и внешней независимой оценки качества образования**

ФОС содержит задания для оценивания знаний, умений и навыков, демонстрирующих уровень сформированности компетенций и индикаторов их достижения в процессе освоения дисциплины (модуля).

Комплект заданий разработан таким образом, чтобы осуществить процедуру оценки каждой компетенции, формируемых дисциплиной (модулем), у обучающегося в письменной форме.

Содержание комплекта заданий включает: *тестовые задания, индивидуальные домашние задания, задания для контрольных работ.*

**5.1. Типовая контрольная работа**

**Вариант 0**

Задача 1.

**1.** Дано комплексное число $z$. Требуется записать число $z$ в алгебраической и тригонометрической формах $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$.

Решение. $z=\frac{2\sqrt{2}}{1+i}=\frac{2\sqrt{2}(1-i)}{2}=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ - алгебраическая форма,

$|z|=\sqrt{2+2}=2,\ \arg z=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow$

$z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ - тригонометрическая форма.

**2.** Пусть $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Найти $z_1+z_2$, $z_1\cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. $z_1 + z_2 = (2-3i) + (4+5i) = (2+4) + (-3+5)i = 6 + 2i$; $z_1z_2 = (2-3i)(4+5i) =$ $=\left(2\cdot 4+(-3)\cdot 5\cdot i^2\right)+\left(2\cdot 5+(-3)\cdot 4\right)i=23-2i$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{4+5i}=\frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{(8-15)+(-12-10)i}{16+25}=-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i.$$

**3.** Вычислить $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Решение. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=\left(\frac{2(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))}{\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))}\right)^{20}=$

$$=\frac{2^{20}}{2^{10}}\frac{e^{i\cdot 20\pi/3}}{e^{i\cdot(-5\pi)}}=2^{10}\frac{e^{i\cdot(6\pi+2\pi/3)}}{e^{i\cdot\pi}}=1024\frac{e^{i\cdot 2\pi/3}}{-1}=-1024\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=512(1-i\sqrt{3}).$$

**4.** 1. $f(z)=z^3$, 2. $f(z)=e^z$. Найти Re $f(z)$ и Im $f(z)$.

Решение. 1. Выражаем $z^3$ через $x,y$: $z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

$$=x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3\right)=u+iv\Rightarrow\begin{cases}u(x,y)=x^3-3xy^2,\\ v(x,y)=3x^2y-y^3.\end{cases}$$

2. $w = e^z$. Здесь

$$u+iv=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)\Rightarrow\begin{cases}u(x,y)=e^x\cos y,\\ v(x,y)=e^x\sin y.\end{cases}$$

**5.** Пусть $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 1 + 2i$.

Найти образ треугольника $z_1z_2z_3$ при отображении $w = z^2$.

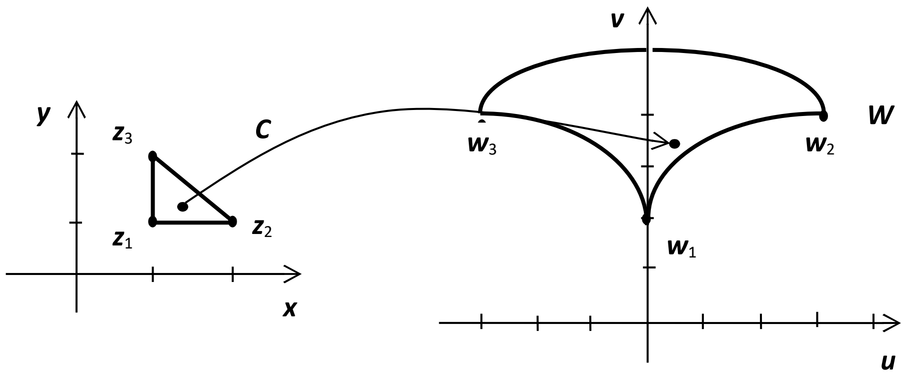
Решение. Находим, куда отображаются вершины треугольника. $w_1 = z_1^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$; $w_2 = z_2^2 = (2+i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$; $w_3 = z_3^2 = (1+2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$. Сторона $z_1z_2$ является частью прямой $y = y_0 = 1$. Эта прямая отображается, как мы видели, в параболу $u=\frac{v^2}{4y_0^2}-y_0^2=\frac{v^2}{4}-1$. Нам нужна часть этой параболы между точками $w_1$ и $w_2$. Далее, сторона $z_1z_3$ является частью прямой $x = x_0 = 1$, отображаемой в параболу $u=x_0^2-\frac{v^2}{4x_0^2}=1-\frac{v^2}{4}$; берём участок этой параболы между точками $w_1$ и $w_3$. Сторона $z_2z_3$ лежит на прямой $x+y=3$; уравнение образа этой прямой получим, исключив из системы

$$\begin{cases} x+y=3, \\ u=x^2-y^2, \\ v=2xy, \end{cases}$$

переменные $x$ и $y$:

$$y=3-x,\ u=x^2-(3-x)^2=6x-9 \Rightarrow x=\frac{u+9}{6} \Rightarrow v=2\cdot\frac{u+9}{6}\left(3-\frac{u+9}{6}\right)=\frac{9}{2}-\frac{u^2}{18}.$$

Участок этой параболы между точками $w_2$ и $w_3$ и даст образ стороны $z_2z_3$. Изображение треугольника построено. Легко убедиться, что область, ограниченная этим треугольником, переходит во внутренность криволинейного треугольника $w_1w_2w_3$ (для этого достаточно найти, например, образ одной точки этой области).




### 5.2. Типовое ИДЗ

**Задача 1.** Проверить выполнение условий Коши - Римана и найти $f'(z)$: а) $f(z)=z^2$, б) $f(z)=e^z$

Решение. 1. Проверим, что для функции $f(z)=z^2$ выполняются условия Коши-Римана. Так как $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$, то

$$u=x^2-y^2,\ v=2xy,\ \frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$ Тогда

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+i\cdot 2y=2(x+iy)=2z.$$

2. Для функции $w=e^z$ мы получили $u(x,y)=e^x\cos y$, $v(x,y)=e^x\sin y$. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x},$$ т.е. функция дифференцируема.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y=e^x(\cos y+i\cdot\sin y)=e^x\cdot e^{iy}=e^{x+iy}=e^z.$$

**Задача2.** Может ли функция $v(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $w=f(z)$? В случае положительного ответа найти функцию $w=f(z)$.

Решение. Докажем, что $v(x,y)$ - гармоническая функция.

$$v'_x=e^{-y}(\cos x-x\sin x-y\cos x);\ v''_{xx}=e^{-y}(-\sin x-\sin x-x\cos x+y\sin x)=e^{-y}(-2\sin x-x\cos x+y\sin x);$$

$$v'_y=-e^{-y}(x\cos x-y\sin x+\sin x);\ v''_{yy}=e^{-y}(x\cos x-y\sin x+\sin x+\sin x)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x+2\sin x);$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

, т.е. $v(x,y)$ - гармоническая функция и, следовательно, может являться мнимой частью аналитической функции.

Найдём эту функцию. Для действительной части $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ справедливы соотношения

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}=\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}=-\boldsymbol{e}^{-y}(\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x}+\sin\boldsymbol{x}),\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{e}^{-y}(\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x});\end{cases}$$

$$\Rightarrow u=-e^{-y}\int(x\cos x-y\sin x+\sin x)dx=-e^{-y}\int x\cdot d\sin x-$$

$$-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\int\sin\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}-$$

$$-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y}),$$

для нахождения $\varphi(\boldsymbol{y})$ используем второе уравнение системы:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\left[-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y})\right]=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x}-\cos\boldsymbol{x})+\varphi'(\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi'(\boldsymbol{y})=0\Rightarrow\varphi(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{C}=\text{const}.$$

Формально мы можем выписать
$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}[-(\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x})+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x})]+\boldsymbol{C}$, но толку в этой записи нет, так как не видна зависимость $\boldsymbol{f}$ от $\boldsymbol{z}$. Поэтому сделаем по-другому. Выпишем производную $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})$:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}+\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{e}^{-y}\left[(\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x}+\sin\boldsymbol{x})-\boldsymbol{i}(\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x})\right].$$

На действительной оси (при $\boldsymbol{y}=0$, т.е при $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}$) функция $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ превращается в функцию действительной переменной $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, её производная - в $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$. Положим в $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})$ $\boldsymbol{y}=0$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}$:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})\Big|_{\boldsymbol{y}=0;\,\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{e}^{-y}\left[(\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x}+\sin\boldsymbol{x})-\boldsymbol{i}(\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x})\right]\Big|_{\boldsymbol{y}=0;\,\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}}=$$

$$=-\boldsymbol{z}\cos\boldsymbol{z}-\sin\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i}(\cos\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}\sin\boldsymbol{z})$$; проинтегрировав это выражение, получим $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$.

Техника нахождения неопределённых интегралов в теории функций комплексной переменной в основном та же, что и в математическом анализе; таблица основных интегралов в обоих случаях одинакова, поскольку одинакова таблица производных. Поэтому

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=-\int\boldsymbol{z}\cos\boldsymbol{z}d\boldsymbol{z}-\int\sin\boldsymbol{z}d\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i}\int\cos\boldsymbol{z}d\boldsymbol{z}-\boldsymbol{i}\int\boldsymbol{z}\sin\boldsymbol{z}d\boldsymbol{z}=-\int\boldsymbol{z}d(\sin\boldsymbol{z})+\cos\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i}\int\boldsymbol{z}d(\cos\boldsymbol{z})=$$

$$=-z\sin z+\int\sin zdz+\cos z+i\sin z+iz\cos z-i\int\cos zdz=-z\sin z-\cos z+\cos z+i\sin z+iz\cos z-$$

$-i\sin z+C=-\boldsymbol{z}\sin\boldsymbol{z}+\boldsymbol{iz}\cos\boldsymbol{z}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{iz}(\cos\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{z})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{iz}\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{iz}}+\boldsymbol{C}$, где $\boldsymbol{C}$ – произвольная вещественная постоянная интегрирования. Постоянная интегрирования будет действительной, если по условию задачи задана функция $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, и с точностью до произвольной постоянной находится действительная часть
$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$; если же задана функция $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, то с точностью до произвольной постоянной интегрирования находится мнимая часть $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, т.е постоянная будет чисто мнимым числом $\boldsymbol{Ci}$ ($\boldsymbol{C}$ - произвольное вещественное число).

Проверим полученный результат. Если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{iz}\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{iz}}+\boldsymbol{C}$, то $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{ix}-\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{e}^{(\boldsymbol{ix}-\boldsymbol{y})}+\boldsymbol{C}=$
$=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{ix}-\boldsymbol{y})(\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{x})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}=$

$$\underbrace{-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{x})+\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+\boldsymbol{i}\cdot\underbrace{\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x})}_{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,-\,\textit{по условию}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}(\sin x + x\cos x - y\sin x) = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{-y}(x\sin x + y\cos x - \cos x) = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

условия Коши-Римана выполнены, следовательно, функция $f(z) = iz\, e^{iz} + C$ - аналитическая на всей комплексной плоскости функция.

### 5.3. Вопросы к зачету

1. Понятие интеграла по комплексному переменному. Формулы для вычисления.
2. Оновные свойства интеграла по комплексному переменному. Интегрирование равномерно сходящегося ряда.
3. Теорема Коши (с предположением о непрерывности производной функции).
4. Основная лемма.
5. Теорема Коши (предполагающая существование лишь конечной производной).
6. Распространение теоремы Коши на случай сложных контуров.
7. Понятие неопределенного интеграла в комплексной области.
8. Интегральная формула Коши (случай односвязной области).
9. Интегральная формула Коши (случай многосвязной области).
10. Интеграл типа Коши.
11. Существование производных всех порядков для функции аналитической в области. Теорема Морера.
12. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций. Первая теорема Вейерштрасса.
13. Ряд Тейлора.
14. Разложение аналитической функции в степенной ряд.
15. Понятие голоморфной функции и его эквивалентность с понятием аналитической функции.
16. Теорема единственности аналитических функций.
17. Нули аналитической функции.
18. Неравества Коши для коэффициентов степенного ряда. Теорема Лиувилля. Вторая теорема Вейерштрасса.
19. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Единственность разложения Лорана.
20. Классификация изолированных особых точек.
21. Теорема Сохоцкого.
22. Поведение аналитической функции на бесконечности.
23. Вычет функции относительно изолированной особой точки. Основная теорема о вычетах.
24. Вычисление вычета относительно полюса.
25. Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки.
26. Приложение теории вычетов к вычислению определенных интегралов.